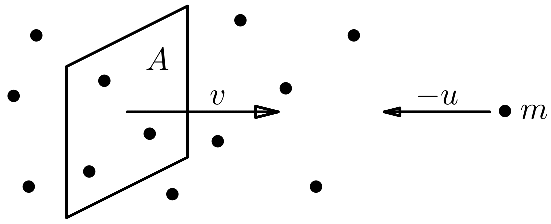
Von der Gaskinetik zum Luftwiderstand

Johannes Barton, Wien 2018

“Warum wirkt sich die thermische Bewegung der Luftmoleküle nicht auf den Luftwiderstand aus?” Dieser Frage soll im vorliegenden Artikel nachgegangen werden.

Bewegt sich eine dünne Platte der Fläche A mit der Geschwindigkeit v parallel zur Flächennormalen durch ein Fluid der Dichte ρ, dann wirkt eine bewegungshemmende Kraft F auf die Platte. Diese Kraft kommt durch Stöße der Fluidteilchen mit der Platte zustande.



Teilchen der Masse m und einer zu v parallelen Geschwindigkeitskomponente u werden bei einem Stoß ihren Impuls um die Größe $2m(v-u)$ ändern. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Geschwindigkeitskomponente u der Teilchen werden wir mit $f(u)$ bezeichnen, sodass auf jeden Fall

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u = 1$$

gilt. In der kinetischen Theorie des idealen Gases nimmt man nun an, dass *alle* Teilchen mit einer passenden Relativgeschwindigkeit auch wirklich an die Platte stoßen, dass also keine anderen Teilchen dem Stoß im Wege stehen. Dies führt auf:

$$\frac{F}{2\rho A} = \int_{-\infty}^{v} (v-u)^2 f(u)\mathrm{d}u \; - \int_{v}^{+\infty} (u-v)^2 f(u)\mathrm{d}u \tag{1}$$

Wobei durch das erste Integral die Stöße von vorne und durch das zweite die Stöße von hinten berücksichtigt werden. Ohne auf eine spezielle Verteilung, wie beispielsweise jene von Maxwell und Boltzmann, näher einzugehen, kann schon aus der Annahme, dass $f(u)$ eine gerade Funktion ist, also $f(u) = f(-u)$ gilt, einiges ausgesagt werden. Unter dieser Bedingung lässt sich obige Gleichung zu

$$\frac{F}{2\rho A} = 2\int_{0}^{v} \left(v^2+u^2\right) f(u)\mathrm{d}u + 4v\int_{v}^{\infty} uf(u)\mathrm{d}u \tag{2}$$

umformen. Für kleine Geschwindigkeiten v liefert das erste Integral keine nennenswerten Beiträge, sodass in diesem Fall die Näherung

$$\frac{F}{2\rho A} \approx 4v\int_{0}^{\infty} uf(u)\mathrm{d}u \; = \; 2\langle|u|\rangle \cdot v$$

angebracht ist. Der Erwartungswert $\langle |u| \rangle$ des Betrages der Geschwindigkeitskomponente u der Teilchen kann als thermische Geschwindigkeit interpretiert werden, die für eine Stickstoffatmosphäre bei Raumtemperatur in der Größenordnung von $300\,\mathrm{m/s}$ liegt.
Eine asymptotische Näherung für große Geschwindigkeiten ergibt sich, wenn das zweite Integral in Glg. (2) vernachlässigt wird:

$$\frac{F}{2\rho A} \approx v^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u \;+\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)\mathrm{d}u \;=\; v^2 + \langle u^2 \rangle$$

Es ist aber eine experimentelle Tatsache, dass sich der Luftwiderstand, zumindest bei üblichen Bedingungen, durch die Beziehung

$$F \approx \frac{\rho A}{2} \cdot v^2 \tag{3}$$

recht gut beschreiben lässt. Offensichtlich liefert der gaskinetische Ansatz viel zu große Kräfte. Obwohl Luft bei Normalbedingungen die thermische Zustandsgleichung des idealen Gases recht gut erfüllt, handelt es sich dabei um kein stark verdünntes Gas, sodass die Voraussetzungen für Glg. (1) nicht erfüllt sind. Sobald sich die Platte bewegt, liegt kein Gleichgewichtszustand mehr vor und $f(u)$ wird ortsabhängig. Um diesen Ideen Rechnung zu tragen, denken wir uns eine Luftschicht konstanter Dicke l, die so dünn ist, dass wirklich alle Teilchen mit der passenden Relativgeschwindigkeit an die Platte stoßen. Diese Schicht wird von der Platte in einer Zeit l/v durchlaufen, sodass wir mit dieser Zeit von der Impulsänderung der Teilchen auf die Kraft schließen können. So lässt sich Glg. (1) folgendermaßen modifizieren:

$$\frac{F}{2\rho A} = v \int\limits_{-\infty}^{v} (v-u) f(u)\mathrm{d}u \;-\; v \int\limits_{v}^{+\infty} (u-v) f(u)\mathrm{d}u \tag{4}$$

Eine Zusammenfassung der beiden Integrale, die wiederum die Stöße von vorne und von hinten beschreiben, liefert:

$$\frac{F}{2\rho A} = v \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (v-u) f(u)\mathrm{d}u = v^2 - v \cdot \langle u \rangle$$

Um eine Übereinstimmung mit Glg. (3) zu erzielen, müssen wir also annehmen, dass die Luft in der nächsten Umgebung der Platte mit der Geschwindigkeit

$$\langle u \rangle = \frac{3}{4} \cdot v$$

strömt. Wobei diese Strömung durch die Bewegung der Platte induziert wird.

Anmerkung: Für die Maxwell–Verteilung

$$f(u) = \sqrt{\frac{1}{2\pi \langle u^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\langle u^2 \rangle}\right)$$

gilt der Zusammenhang $\pi \langle |u| \rangle^2 = 2\langle u^2 \rangle$.