

# Das Physikalische am Pendel

Johannes Barton, Wien 2013

Fragt man einen Schüler, was denn ein physikalisches Pendel sei, dann erhält man öfters Antworten wie: Eine Schaukel, die weit ausschwingt aber wegen des Luftwiderstandes irgendwann zur Ruhe kommt. Solche Antworten sind bedeutsam, da Lehrbücher zumeist nur die gedämpfte harmonische Schwingung als Näherung für kleine Auslenkungen oder das ungedämpfte physikalische Pendel bei großen Auslenkungswinkeln behandeln.

Die vorliegende Arbeit soll durch ein konkretes Experiment und numerische Lösungen der entsprechenden Differentialgleichungen diese Lücke in den Lehrbüchern füllen und dabei unterschiedliche Ansätze für die Reibungskräfte diskutieren.

Wir betrachten einen starren Körper der Masse  $m$ , der drehbar um eine horizontale Achse gelagert ist, welche den Abstand  $l$  zum Schwerpunkt des Körpers hat. Das Trägheitsmoment des Körpers bezogen auf diese Achse wollen wir mit  $J$  bezeichnen. So ein System hat eine stabile Ruhelage, die dadurch gekennzeichnet ist, dass der Schwerpunkt senkrecht unter der Achse liegt. Wird der Körper aus dieser Ruhelage um einen bestimmten Winkel ausgelenkt und danach losgelassen, dann kann er aufgrund der Erdanziehungskraft  $m \cdot g$  eine pendelnde Bewegung ausführen. Wir sprechen von einem physikalischen Pendel. Für den Winkel  $x$  als Funktion der Zeit  $t$  gilt bei Vernachlässigung aller weiteren Kräfte die Differentialgleichung [1]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m \cdot g \cdot l}{J} \cdot \sin(x)$$

Wobei mit  $g$  die Erdbeschleunigung  $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  bezeichnet ist. Diese Differentialgleichung kann nicht in geschlossener Form gelöst werden. Harmonische Schwingungen als Lösung werden nur bei der Näherung  $\sin(x) \approx x$  erhalten. Da für  $0 \leq x \leq \pi$  stets  $\sin(x) \leq x$  gilt, wird auch die rücktreibende Kraft kleiner und demnach die Schwingungsdauer größer ausfallen als bei der harmonischen Näherung. Erweitern wir obige Bewegungsgleichung um einen Reibungsterm, den wir als Funktion  $f(u)$  der Geschwindigkeit ansehen können, dann erhalten wir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m \cdot g \cdot l}{J} \cdot \sin(x) - f(u) \quad \text{mit} \quad u = \frac{dx}{dt} \quad \text{und} \quad f(0) = 0$$

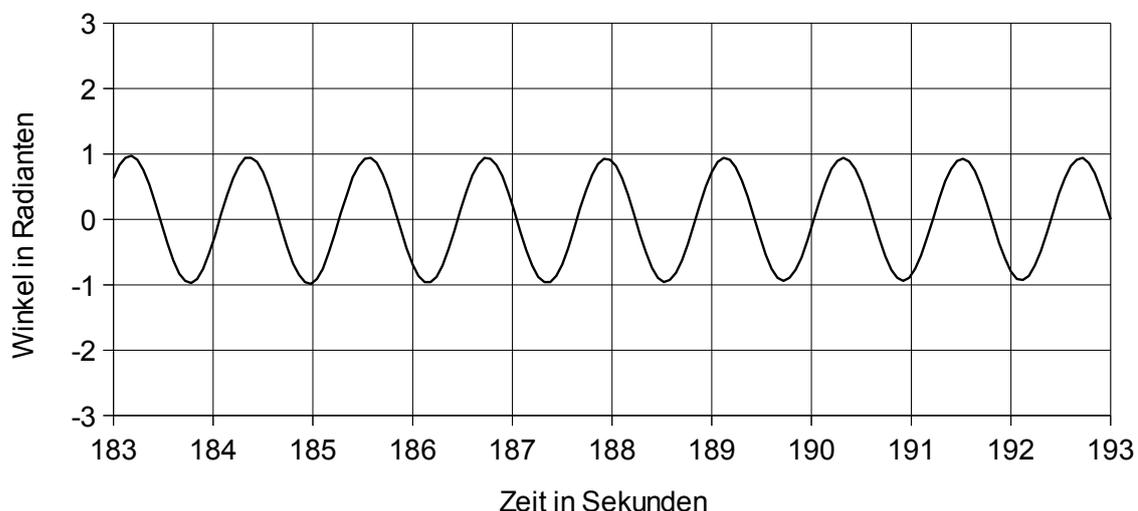
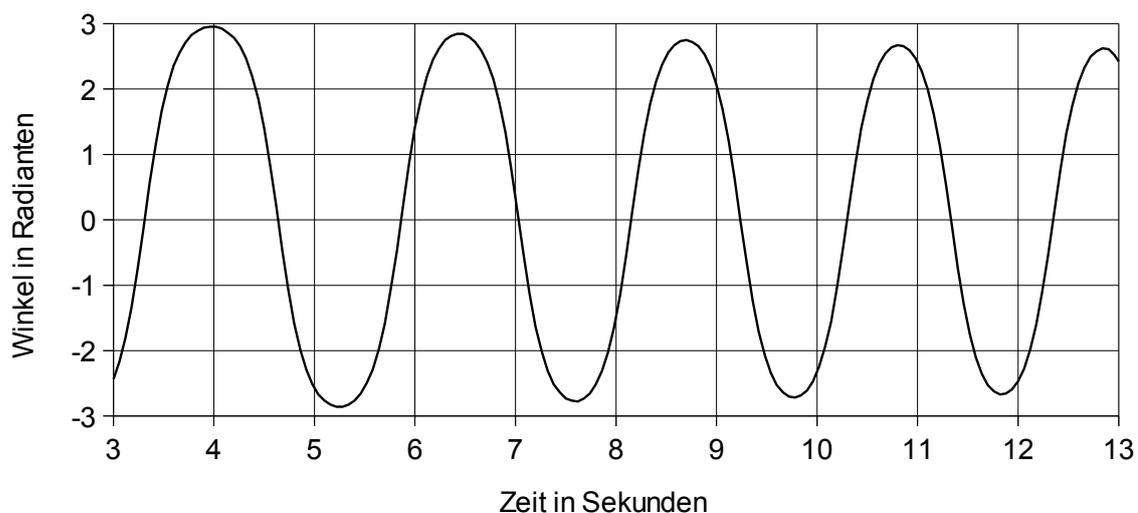
Für eine Lösung in geschlossener Form muss nun auch noch eine Proportionalität zwischen dem Reibungsterm und der Geschwindigkeit angenommen werden. Bei geeigneter Wahl der Parameter liefern diese Näherungen gedämpfte harmonische Schwingungen als Lösung, welche in der Form

$$x(t) = x(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

mit positiven Parametern  $\lambda$  und  $\omega$  dargestellt werden können.

Werden nun die maximalen Winkel aufgrund von Reibungseinflüssen kleiner, dann wird sich auch der anfängliche Bewegungsablauf immer mehr einer harmonischen Schwingung annähern, sodass auch die Schwingungsdauern mit der Zeit kleiner werden.

Dies zeigt ein Vergleich der beiden folgenden Abbildungen, bei denen eine relativ schwach gedämpfte Pendelbewegung über mehr als 200 Sekunden gemessen wurde.



Man erkennt deutlich, dass der Bewegungsablauf eines physikalischen Pendels bei großen Anfangswinkeln bei weitem keiner gedämpften harmonischen Schwingung entspricht. Um also solche Bewegungsabläufe zu beschreiben, sind wir auf numerische Lösungen der obigen Differentialgleichung angewiesen. Dies bietet aber auch die Möglichkeit Reibungsterme, welche nicht proportional zur Geschwindigkeit sind, zu diskutieren. Beispielsweise wird der Luftwiderstand, ein Phänomen, das auch bei einem realen Pendel auftritt, durch eine Kraft proportional zum Geschwindigkeitsquadrat beschrieben. Wir machen daher den Ansatz

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha \cdot \sin(x) - \beta \cdot u - \gamma \cdot u \cdot |u|$$

mit den nichtnegativen Parametern  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , die wir durch Anpassen der numerischen Lösungen an die Messwerte bestimmen wollen. Zur weiteren Auswertung ist es günstig, die Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung überzuführen.

$$\frac{dx}{dt} = u \quad \text{und} \quad \frac{du}{dt} = -\alpha \cdot \sin(x) - \beta \cdot u - \gamma \cdot u \cdot |u|$$

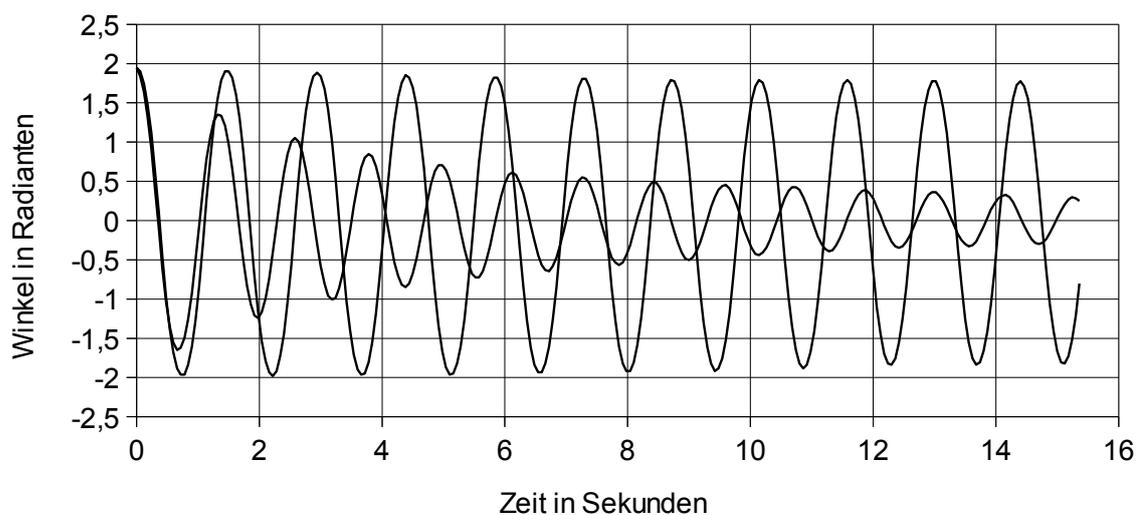
Zur Messung der Pendelbewegung dient ein Drehgeber, auf dessen Achse exzentrisch ein starrer Körper montiert ist. Damit besteht das Pendel aus diesem starren Körper und dem beweglichen Teil des Drehgebers, von dem das Trägheitsmoment üblicherweise nicht bekannt ist. Der dominante Teil des Pendels wird durch eine rechteckige 1 mm dicke Metallplatte mit einer Höhe von 160 mm und einer Breite von 110 mm gebildet. Diese Platte hat eine Masse von 124 g und ist über ein dünnes Rohr mit der Achse des Drehgebers so verbunden, dass der Massenmittelpunkt der Platte von der Drehgeberachse einen Abstand von 312 mm aufweist. Der Vorteil dieser speziellen Konstruktion ist, dass das Pendel parallel oder senkrecht zur Platte schwingen kann. Im ersten Fall werden wir mit einer kleinen, im zweiten Fall mit einer relativ großen Reibung rechnen können. Zwar ergeben diese beiden unterschiedlichen Orientierungen der Platte auch unterschiedliche Trägheitsmomente, doch ist dieser Unterschied bezogen auf das gesamte Trägheitsmoment kleiner als 1 % und somit auch kleiner als der Fehler, den wir durch Vernachlässigung aller anderer Teile des Pendels begehen [2]. Wir werden demnach den Parameter  $\alpha$  sowohl für das Experiment bei kleiner als auch für das Experiment bei großer Reibung zu

$$\alpha = \frac{m \cdot g \cdot l}{J} \approx \frac{m \cdot g \cdot l}{m \cdot l^2} = \frac{g}{l} = 31 \text{ s}^{-2}$$

abschätzen. Da die Massen der beweglichen Teile des Drehgebers als symmetrisch um die Achse verteilt angenommen werden können, liefern sie nur Beiträge zum Nenner von  $\alpha$ , sodass der obige Wert tendenziell etwas zu groß sein wird.

Der verwendete Drehgeber weist 400 Schritte pro Umdrehung auf. Das zum Drehgeber passende Messinterface ist so programmiert, dass alle 60 ms der Drehwinkel registriert wird. Die Eichung des Drehgebers erfolgt durch eine separate Messung, bei der das Pendel per Hand einmal um die eigene Achse gedreht wird. Der so erhaltene Messwert kann dann mit einem Drehwinkel  $x = 2\pi$  identifiziert werden.

Die nachfolgende Abbildung vergleicht die Pendelbewegungen bei den beiden Reibungsbedingungen mit nahezu gleicher Anfangsamplitude.

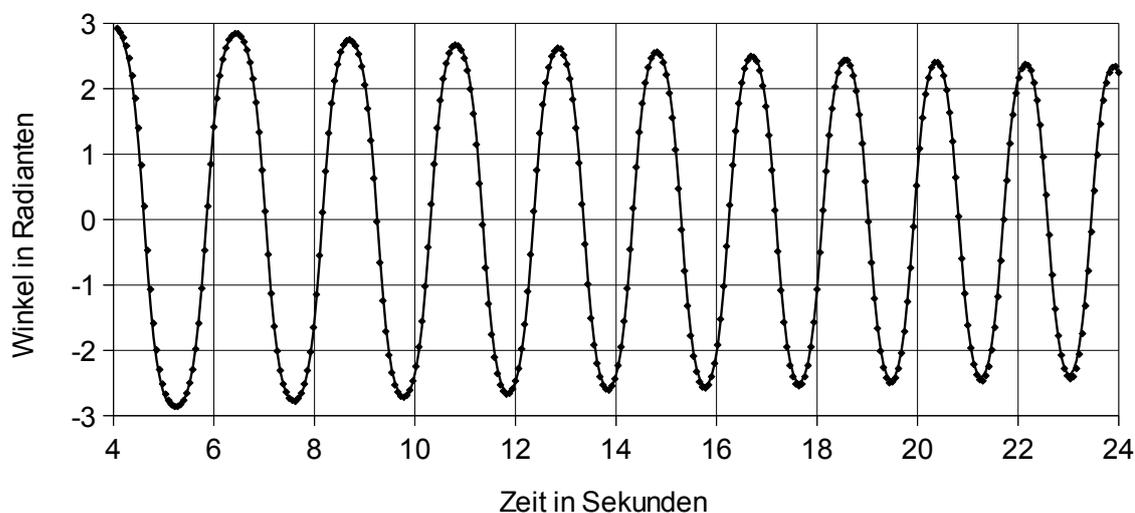


Als numerisches Lösungsverfahren verwenden wir einen semi-expliziten Euler-Algorithmus, der darauf beruht, dass die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden. Damit sich die dabei gemachten Fehler nicht kumulieren ist es günstig, bei der einen Variablen Vorwärtsdifferenzen und bei der anderen Rückwärtsdifferenzen zu wählen [3].

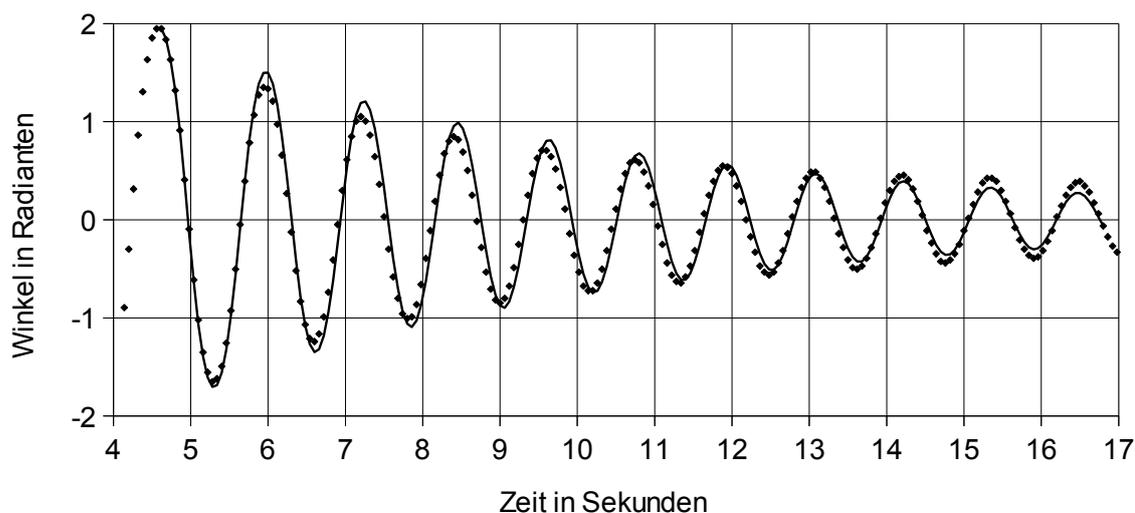
$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = -\alpha \cdot \sin(x_n) - \beta \cdot u_n - \gamma \cdot u_n \cdot |u_n| \quad \text{und} \quad \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = u_{n+1}$$

Hier bezeichnet  $\tau$  den zeitlichen Abstand zwischen zwei benachbarten Stützstellen. Wir haben damit eine einfache rekursive Rechenvorschrift, die wir mit jeder beliebigen Tabellenkalkulation bearbeiten können. Um einen direkten Vergleich mit den Messwerten zu ermöglichen, ist es günstig die Schrittweite  $\tau$  mit der zeitlichen Auflösung des Messinstruments, in unserem Fall also 0.06 Sekunden, gleichzusetzen. Als Startwert  $x_0$  wählt man am einfachsten einen Messwert  $X_k$  und legt die Anfangsgeschwindigkeit entweder zu  $u_0 = (X_k - X_{k-1})/\tau$  oder  $u_0 = (X_{k+1} - X_k)/\tau$  fest. Den kleinsten Anfangsfehler wird man dabei machen, wenn man ein Maximum der Messkurve wählt, da in diesem Fall die Startgeschwindigkeit nahe bei null liegen sollte.

Wir beginnen mit dem Experiment mit kleiner Reibung, bei dem wir den Luftwiderstand vernachlässigen und demnach  $\gamma = 0$  setzen. Konzentrieren wir uns auf die ersten zehn vollen Schwingungen, dann erhalten wir eine sehr gute Übereinstimmung der Näherungsrechnung (durchgehende Linie) mit den Messwerten (Punkte), wenn wir die Parameter  $\alpha = 30.9 \text{ s}^{-2}$  und  $\beta = 0.011 \text{ s}^{-1}$  wählen.



Für das Experiment mit großer Reibung übernehmen wir den Parameter  $\alpha = 30.9 \text{ s}^{-2}$  aus dem Experiment mit kleiner Reibung, da er recht gut zu unseren theoretischen Betrachtungen passt. Für eine gute Anpassung der Näherungsrechnung an die Messwerte ist zunächst die Lage der Maxima und erst in zweiter Linie die Höhe der Maxima ausschlaggebend. Demnach ist ein “least square fit” nicht zielführend. Setzen wir wiederum  $\gamma = 0$ , dann würde sich die gefühlsmäßig beste Anpassung für  $\beta = 0.31 \text{ s}^{-1}$  ergeben.



Diese Anpassung ist aber nicht sehr befriedigend, sodass wir  $\gamma \neq 0$  ausprobieren sollten. Wenden wir uns also der Beschreibung des Luftwiderstandes zu:

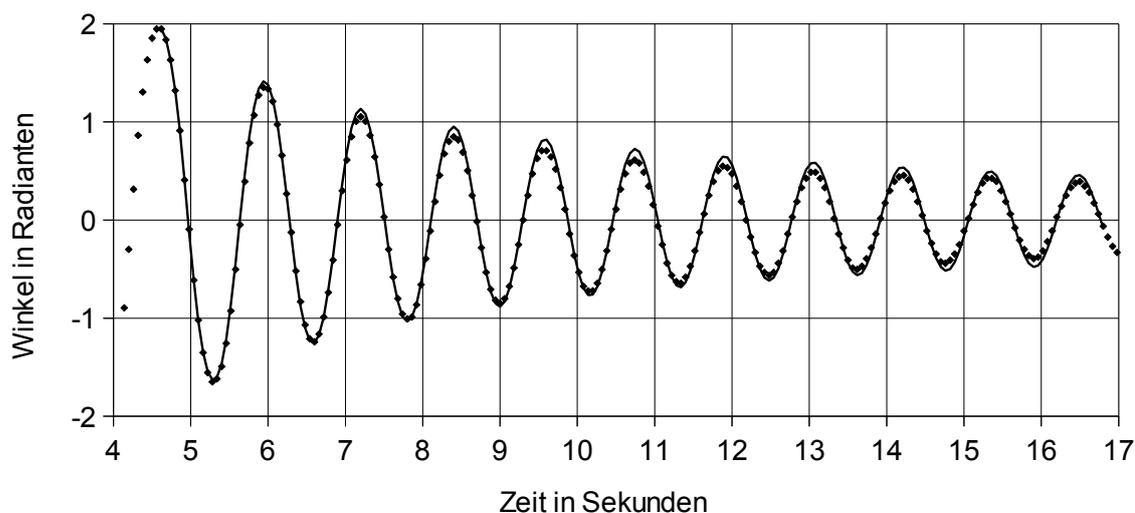
Bewegt sich eine Platte der Fläche  $A$  mit der Geschwindigkeit  $v$  durch ein gasförmiges Medium der Dichte  $\rho$ , dann wird sie während der kurzen Zeit  $\Delta t$  ein Volumen  $V = A \cdot v \cdot \Delta t$  verdrängen, also auf die Geschwindigkeit  $v$  beschleunigen müssen. Dazu ist eine Kraft

$$F \approx \rho \cdot A \cdot v^2$$

notwendig. Um  $\gamma$  abzuschätzen, nehmen wir die Dichte von Luft mit  $\rho = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  an und denken uns wiederum die Kraft im Schwerpunkt der Platte angreifend. Gemäß  $v = l \cdot u$  erhalten wir [4]:

$$\gamma \approx \frac{\rho \cdot A \cdot l}{m} = 0.053$$

Mit  $\alpha = 30.9 \text{ s}^{-2}$  und  $\beta = 0$  finden wir die beste Anpassung, wenn wir  $\gamma = 0.058$  wählen.



Ein Vergleich der letzten beiden Abbildungen zeigt, dass der Luftwiderstand nicht vernachlässigt werden sollte [5].

Anmerkungen:

- [1] Vergleiche: Walcher W., *Praktikum der Physik*, B. G. Teubner, Stuttgart 1985
- [2] Eine genaue Vermessung des verwendeten Pendels ohne Berücksichtigung des Drehgebers lieferte:  
Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt = 281.5 mm  
Masse des Pendels = 145 g  
Trägheitsmoment bei großer Reibung =  $12.7 \text{ g} \cdot \text{m}^2$   
Trägheitsmoment bei kleiner Reibung =  $12.8 \text{ g} \cdot \text{m}^2$   
Damit wäre der Parameter  $\alpha$  bei großer Reibung zu  $31.53 \text{ s}^{-2}$  und bei kleiner Reibung zu  $31.28 \text{ s}^{-2}$  gegeben. Diese Werte werden bei Berücksichtigung der beweglichen Teile des Drehgebers etwas kleiner ausfallen und sind mit den Abschätzungen im Haupttext durchaus verträglich.
- [3] Das Differentialgleichungssystem

$$\frac{du}{dt} = b(x, u) \quad \frac{dx}{dt} = u$$

wird in unserem Fall näherungsweise durch die rekursive Vorschrift

$$u_{n+1} = u_n + b_n \cdot \tau \quad x_{n+1} = x_n + u_{n+1} \cdot \tau = x_n + u_n \cdot \tau + b_n \cdot \tau^2$$

gelöst. Um die dabei gemachten Fehler abzuschätzen, führen wir die Abweichungen  $\delta u_n$  und  $\delta x_n$  zu den wahren Werten ein. Die lineare Fehleranalyse liefert:

$$\begin{pmatrix} \delta u_{n+1} \\ \delta x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial b}{\partial u} \cdot \tau & \frac{\partial b}{\partial x} \cdot \tau \\ \tau + \frac{\partial b}{\partial u} \cdot \tau^2 & 1 + \frac{\partial b}{\partial x} \cdot \tau^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta u_n \\ \delta x_n \end{pmatrix}$$

Damit die Fehler nicht von Schritt zu Schritt anwachsen, darf der Betrag der Determinante obiger Matrix nicht größer als eins sein.

$$\left| 1 + \frac{\partial b}{\partial u} \cdot \tau \right| \leq 1$$

Dieses lineare Stabilitätskriterium ist in unserem Fall aber sicherlich erfüllt, da es mit

$$\frac{\partial b}{\partial u} = -\beta - 2 \cdot \gamma \cdot |u| \quad \text{als} \quad |u| \leq \frac{2 - \beta \cdot \tau}{2 \cdot \gamma \cdot \tau}$$

angeschrieben werden kann.

- [4] Konsequenterweise müssen wir auch das Drehmoment, welches der Luftwiderstand auf das Pendel ausübt, durch das Integral

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\rho \cdot A \cdot u^2}{y_2 - y_1} \cdot y^3 \cdot dy = \frac{\rho \cdot A \cdot u^2}{4} \cdot (y_2^3 + y_2^2 \cdot y_1 + y_2 \cdot y_1^2 + y_1^3)$$

berechnen, wobei  $y_1$  und  $y_2$  die Abstände von der Drehachse zur Ober- bzw. Unterseite der Platte bezeichnen. Mit dem oben angegebenen Trägheitsmoment finden wir den Wert  $\gamma = 0.05383$  und somit die Abschätzung im Haupttext glänzend bestätigt.

- [5] Die "besten" Parameter kann und soll jeder anhand der entsprechenden EXCEL-Datei ausprobieren: [www.zbmathematik.at](http://www.zbmathematik.at)