Optimierung eines Kartentricks

Johannes Barton, Wien 2010

Ein beliebter Kartentrick, der hellseherische Fähigkeiten vorgaukelt, basiert darauf, dass ein Zuseher eine von 21 Karten wählt, welche der Hellseher erraten soll. Hat der Zuseher seine Wahl getroffen, dann werden die Karten gemischt und der gesamte Kartenstapel wird verdeckt auf den Tisch gelegt. Auf Anweisung des Hellsehers verteilt der Zuseher die Karten, mit der obersten beginnend, der Reihe nach auf drei Teilstapel, sodass beispielsweise die vierte Karte über der ersten zu liegen kommt. Während dieser Aufteilung der Karten sind diese nur für den Zuschauer sichtbar, da alle Karten mit der Rückseite nach oben auf dem Tisch liegen. Sind alle 21 Karten nach diesem Schema verteilt, dann gibt der Zuseher dem Hellseher jenen Stapel bekannt, in dem sich die ausgewählte Karte befindet. Der Hellseher legt jetzt diesen benannten Stapel auf einen der beiden anderen und den noch verbleibenden auf diese beiden. Damit bilden die 21 Karten wiederum einen einzigen Kartenstapel, bei dem die Rückseiten nach oben weisen und die ausgewählte Karte irgendwo im mittleren Drittel liegt. Dieses Verfahren wird noch zweimal wiederholt, sodass der Zuseher insgesamt dreimal einen Stapel genannt hat. Nun kennt der Hellseher die ausgewählte Karte, da sich diese genau in der Mitte des Stapels befindet.

Um dies zu verdeutlichen, nehmen wir beispielsweise die als **X** markierte Karte als die ausgewählte. Diese wurde in der folgenden Darstellung als 19te Karte aufgelegt, und befindet sich daher im ersten Stapel ganz oben.

X	20	21		19	20	21		19	20	21
16	17	18		16	17	18		16	17	18
13	14	15		13	14	15		13	14	15
10	11	12	$\Longrightarrow$	10	11	12	$\Longrightarrow$	10	11	**X**
7	8	9		7	**X**	9		7	8	9
4	5	6		4	5	6		4	5	6
1	2	3		1	2	3		1	2	3

Nimmt man nun den ersten Stapel als mittleren Teilstapel auf, dann wird die markierte Karte als achte aufgelegt, sodass sie in den zweiten Stapel an die fünfte Stelle, von oben gezählt, wandert. Da bei diesem Prozedere die Kartenstapel nie umgedreht werden, wird die markierte Karte als zwölfte nach dem neuerlichen Bilden des Gesamtstapels aufgelegt. Jetzt befindet sie sich genau in der Mitte ihres Stapels, und da dieser vom Zuseher angezeigt wird, kennt der Hellseher die ausgewählte Karte.

Wir bezeichnen mit n_1, n_2, n_3 die Stapelnummer der ausgewählten Karte nach dem ersten, zweiten und dritten Auflegen der Karten. Diese Zahlen können Werte aus der Menge $\{1, 2, 3\}$ annehmen. Genauso geben die Zahlen m_1, m_2, m_3 mit der Wertemenge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ die von oben gezählte Stellung der ausgewählten Karte im betreffenden Teilstapel an. All diese Variablen erhalten wir im Wesentlichen, indem wir Divisionen durch 3 mit Rest ausführen. Bleiben wir bei obigem Beispiel:
Die 19te Karte wandert in den ersten Stapel ($n_1 = 1$), da $19 = 3 \cdot 6 + 1$ gilt. Die Zahl 6 gibt die Stellung der Karte im ersten Stapel, allerdings von der untersten Karte gezählt, an. Daher muss $m_1 = 7 - 6 = 1$ gelten. Im nächsten Gesamtstapel ist die ausgewählte Karte die achte, weil sieben Karten eines anderen Teilstapels vor ihr aufgenommen werden. Wegen $8 = 3 \cdot 2 + 2$ gilt nun $n_2 = 2$ und $m_2 = 7 - 2 = 5$. Usw.

Allgemein geschrieben, liefert das Verfahren für die Positionsangabe der ausgewählten Karte nach dem zweiten und dritten Auflegen die beiden Gleichungen:

$$3 \cdot (7 - m_2) + n_2 = 7 + m_1$$
$$3 \cdot (7 - m_3) + n_3 = 7 + m_2$$

Da der Hellseher nur an m_3 interessiert ist, werden wir m_2 aus diesem Gleichungssystem eliminieren. So ergibt sich ein für die Analyse bequemes Resultat:

$$9 \cdot m_3 = 28 + m_1 - n_2 + 3 \cdot n_3$$

Setzen wir $m_1 = 1$, $n_2 = 3$ und $n_3 = 1$, dann führt dies zum kleinsten Wert, den die rechte Seite dieser Gleichung annehmen kann. Der größte Wert der rechten Seite wäre bei der Belegung $m_1 = 7$, $n_2 = 1$ und $n_3 = 3$ gegeben. So erkennen wir, dass

$$29 \leq 9 \cdot m_3 \leq 43$$

gelten muss. In diesem Intervall liegt aber nur eine ganzzahlige Lösung, die durch 9 teilbar ist, nämlich 36, sodass

$$m_3 = 4$$

die einzige Möglichkeit darstellt. Das heißt aber, dass nach dem dritten und damit letzten Bilden der Teilstapel die ausgewählte Karte im benannten Stapel die vierte Karte von oben ist.

Schon nach der ersten Vorführung dieses Kartentricks wird dem Zuschauer klar, dass der Hellseher nur aus den sieben Karten des zuletzt benannten Teilstapels wählen muss. Hier stellt sich schon die Frage, ob sich nicht diese Anzahl vergrößern lässt, um den Kartentrick ein wenig anspruchsvoller zu gestalten. Wird dieser Kartentrick allerdings öfters wiederholt, dann erkennt das Publikum recht bald, dass der Teilstapel mit der ausgewählten Karte immer in der Mitte des Gesamtstapels platziert wird. Dies ist offensichtlich eine weitere Schwachstelle des Tricks. Viel günstiger wäre es, wenn das Publikum die Wahl hätte, in welcher Reihenfolge die einzelnen Teilstapel in den Gesamtstapel aufgenommen werden.

Um den Kartentrick zu optimieren, führen wir folgende Verallgemeinerungen durch:
Wir nehmen N Teilstapel mit je M Karten, sodass der Wertebereich der Variablen n_1, n_2 und n_3 aus der Menge $\{1, \ldots, N\}$ und der Wertebereich von m_1, m_2 und m_3 aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, M\}$ besteht. An dem dreimaligen Bilden der Teilstapel werden wir nichts ändern, damit der Kartentrick nicht zu langweilig wird. Mit k_1 geben wir die Position, wiederum von oben gesehen, des benannten Teilstapels beim ersten Aufnehmen der Teilstapel zum Gesamtstapel an. Genauso sei die Variable k_2 für das zweite Aufnehmen der Teilstapel definiert. Damit ist der Wertebereich von k_1 und k_2 ebenfalls auf die Menge $\{1, \ldots, N\}$ beschränkt. Der Hellseher kann jetzt getrost auch das Bilden der Gesamtstapel dem Zuseher überlassen, er muss sich nur die Zahlen k_1 und k_2 merken.

So wie beim ursprünglichen Kartentrick finden wir das Gleichungssystem

$$N \cdot (M - m_2) + n_2 = M \cdot (k_1 - 1) + m_1$$
$$N \cdot (M - m_3) + n_3 = M \cdot (k_2 - 1) + m_2$$

und daraus

$$N^2 \cdot m_3 + M \cdot \left(N \cdot k_2 - k_1 - N^2 + 1\right) = N \cdot n_3 - n_2 + m_1$$

als relevante Beziehung. Offensichtlich ist der größte Wert, den die rechte Seite dieser Gleichung annehmen kann, durch $N^2 - 1 + M$ gegeben, wogegen es sich bei dem kleinsten Wert um die Zahl 1 handelt.

$$1 \leq N^2 \cdot m_3 + M \cdot \left(N \cdot k_2 - k_1 - N^2 + 1\right) \leq N^2 - 1 + M$$

In dieser Darstellung sehen wir, dass für eine eindeutige Lösung die Anzahl M der Karten im Teilstapel nicht größer als N^2 sein darf, da in mehr als $2 \cdot N^2 - 1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen immer mindestens zwei durch N^2 teilbar sind.

Untersuchen wir einmal den ursprünglichen Kartentrick mit $M = 7$ und $N = 3$ bei dem $k_1 = 2$ und $k_2 = 1$ durch das Publikum gewählt wurde. In diesem Fall erhalten wir

$$50 \leq 9 \cdot m_3 \leq 64$$

als relevante Ungleichungskette. Diese ist aber mit den beiden Werten $m_3 = 6$ und $m_3 = 7$ kompatibel, sodass dieser Kartentrick nicht immer erfolgreich sein wird.

Wählen wir dagegen $M = N^2$ und damit insgesamt N^3 Karten, dann erhalten wir einen im obigen Sinne optimierten Kartentrick, der bei jeder Belegung der Variablen k_1 und k_2 eindeutig funktioniert, denn aus

$$1 \leq N^2 \cdot \left(m_3 + N \cdot k_2 - k_1 - N^2 + 1\right) \leq 2 \cdot N^2 - 1$$

folgern wir, dass für eine ganzzahlige Lösung der Klammerausdruck den Wert 1 haben muss:

$$m_3 = N^2 - N \cdot k_2 + k_1$$

Nicht nur, dass diese Formel eine eindeutige Bestimmung der ausgewählten Karte gestattet, sie zeigt auch, dass alle Positionen von 1 bis $M = N^2$ im zuletzt benannten Stapel möglich sind.

Bei Verwendung von drei Teilstapeln, was dem ursprünglichen Kartentrick entspricht, würden wir also insgesamt $3 \cdot 9 = 27$ Karten benötigen, und könnten uns die Position der ausgewählten Karte im zuletzt benannten Teilstapel mittels $m_3 = 9 - 3 \cdot k_2 + k_1$ berechnen.

ps: Die Anregung zur Auseinandersetzung mit diesem Kartentrick verdanke ich meinem Sohn Fabio, der ihn mir voller Stolz vorführte.